

Nr postępowania: ZP/47/055/U/13

ZAKRESY MATERIAŁU

Z-1:

1) Funkcja rzeczywista jednej zmiennej: ciąg dalszy

- a) Definicja granicy funkcji,
- b) Twierdzenie o trzech funkcjach, o granicy funkcji złożonej,
- c) Symbole nieoznaczone,
- d) Definicja funkcji ciągłej i jej własności.

2) Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej:

- a) Definicja ilorazu różnicowego i geometryczna interpretacja,
- b) Definicja pochodnej funkcji i jej geometryczna interpretacja,
- c) Związek między pochodną a ciągłością funkcji,
- d) Definicja różniczki funkcji,
- e) Twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej,
- f) Twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej (przykład),
- g) Twierdzenie Rolle'a i Lagrange'a i ich geometryczne interpretacje,
- h) Reguła de l'Hospitala,
- i) Definicja asymptoty pionowej i ukośnej,
- j) Twierdzenie o asymptocie ukośnej,
- k) Definicja ekstremum lokalnego,
- l) Warunek konieczny i dostateczny istnienia ekstremum funkcji,
- m) Definicja funkcji wklęsłej, wypukłej i punktu przegięcia,
- n) Warunek wystarczający na wypukłość i wklęsłość funkcji,
- o) Warunek konieczny i wystarczający na istnienie punktu przegięcia.

3) Funkcja dwóch zmiennych:

- a) Definicja funkcji dwóch zmiennych, dziedzina i wykres,
- b) Definicja pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego.

4) Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej:

- a) Definicja funkcji pierwotnej,
- b) Definicja całki nieoznaczonej,
- c) Twierdzenie o całkowaniu przez podstawianie dla całek nieoznaczonych,
- d) Twierdzenie o całkowaniu przez części dla całek nieoznaczonych,
- e) Definicja całki oznaczonej i jej geometryczna interpretacja,
- f) Własności całki oznaczonej,
- g) Twierdzenia zasadnicze rachunku całkowego,
- h) Twierdzenie o całkowaniu przez podstawianie dla całek oznaczonych,
- i) Twierdzenie o całkowaniu przez części dla całek oznaczonych,
- j) Zastosowanie geometryczne całki oznaczonej,

5) Całki podwójne:

- a) Definicja obszaru normalnego względem osi OX, OY ,
- b) Własności całki podwójnej,
- c) Interpretacja geometryczna całki podwójnej.

Z-2:

- 1) **Szeregi liczbowe:**
 - a) definicje i twierdzenia,
 - b) kryteria zbieżności szeregów,
 - c) zbieżność bezwzględna i warunkowa szeregów.
- 2) **Elementy algebry liniowej:**
 - a) wyznaczniki i ich własności,
 - b) macierz i działania na macierzach,
 - c) macierz odwrotna i rząd macierzy,
 - d) układy równań liniowych,
 - e) twierdzenie Cramera,
 - f) twierdzenie Kroneckera – Capelliego.
- 3) **Elementy geometrii analitycznej:**
 - a) algebra wektorów,
 - b) iloczyn skalarny, iloczyn wektorowy i mieszany,
 - c) płaszczyzna w przestrzeni,
 - d) prosta w przestrzeni,
 - e) krzywe stożkowe właściwe,
 - f) powierzchnie stopnia drugiego.
- 4) **Rachunek różniczkowy i całkowy funkcji dwóch zmiennych:**
 - a) granica i ciągłość funkcji dwóch zmiennych,
 - b) pochodne cząstkowe,
 - c) różniczka zupełna,
 - d) ekstrema funkcji dwóch zmiennych,
 - e) całki podwójne i ich zastosowanie,
 - f) opisywanie obszarów przestrzennych we współrzędnych walcowych oraz sferycznych.
- 5) **Elementy analizy wektorowej:**
 - a) pole skalarne, pole wektorowe,
 - b) gradient, dywergencja, rotacja, potencjał pola wektorowego i jego wyznaczenie.
- 6) **Równania różniczkowe zwyczajne i cząstkowe:**
 - a) równania różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego (o zmiennych rozdzielonych, jednorodnie, liniowe Bernoulliego),
 - b) równania różniczkowe liniowe rzędu drugiego o stałych współczynnikach (metoda przewidywań i metoda uzmienniania stałych),
 - c) przykłady równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych,
 - d) równanie różniczkowe cząstkowe liniowe rzędu pierwszego o niewiadomej funkcji $u = u(x,y,z)$,
 - e) równanie rozchodzenia się ciepła.
- 7) **Jednowymiarowa zmienna losowa typu skokowego i ciągłego:**
 - a) przestrzeń probabilistyczna,
 - b) rozkład prawdopodobieństwa,
 - c) funkcja gęstości,
 - d) dystrybuanta, parametry rozkładów (wartość oczekiwana, moment rzędu k , wariancja, odchylenie standardowe, zmienna losowa standaryzowana, momenty centralne rzędu k , moda).
- 8) **Elementy statystyki matematycznej:**
 - a) podstawowe pojęcia i twierdzenia,
 - b) rozkłady występujące w statystyce, przedziały ufności, weryfikacja hipotez statystycznych.
- 9) **Zagadnienia optymalizacji:**
 - a) istota programowania liniowego,
 - b) metoda geometryczna rozwiązywania programowania liniowego,
 - c) metoda sympleks,
 - d) dwoistość (dualność) programowania liniowego.

Z-3:

1) Szeregi liczbowe:

- a) definicje i twierdzenia
- b) kryteria zbieżności szeregów, zbieżność bezwzględna i warunkowa,
- c) szeregi liczbowe zespolone.

2) Szeregi funkcyjne:

- a) zbieżność punktowa, zbieżność jednostajna,
- b) obszar zbieżności szeregu funkcyjnego,
- c) własności sumy szeregu funkcyjnego.

3) Szeregi potęgowe

- a) promień i przedział zbieżności,
- b) rozwijanie w szereg potęgowy – szereg Taylora, szereg Maclaurina,
- c) suma szeregu i jej własności,
- d) szeregi potęgowe zespolone – koło zbieżności.

4) Szeregi Fouriera:

- a) wielomian trygonometryczny w postaci rzeczywistej, zespolonej,
- b) szeregi trygonometryczne, w tym szereg Fouriera – zbieżność, suma szeregu,
- c) postać zespolona szeregu Fouriera – widmo amplitudowe, widmo fazowe.

5) Uzupełnienie wiedzy z geometrii analitycznej: powierzchnie stopnia drugiego.

6) Funkcje wielu zmiennych – ogólne fakty:

- a) rachunek różniczkowy i całkowy funkcji dwóch zmiennych – ciągłość,
- b) pochodne cząstkowe, różniczki zupełne, ekstrema lokalne, globalne,
- c) współrzędne biegunowe, uogólnione współrzędne biegunowe,
- d) całki podwójne i ich zastosowania.

7) Równania różniczkowe zwyczajne:

- a) wybrane przykłady zastosowań równań różniczkowych w fizyce, ekologii i biologii,
- b) pewne typy równań rzędu pierwszego,
- c) równania różniczkowe liniowe rzędu drugiego i wyższych rzędów, w tym równania o stałych współczynnikach (metoda przewidywania, metoda uzmienniania stałych)

Z-4:

1) Liczby zespolone

- a) postać trygonometryczna i wykładnicza liczby zespolonej .
- b) wzór de Moivre'a.
- c) pierwiastki zespolone.
- d) rozwiązywanie równań w liczbach zespolonych.

2) Algebra liniowa

- a) działania na macierzach.
- b) macierz odwrotna.
- c) wyznacznik macierzy kwadratowej (rozwińnięcie Laplace'a).
- d) własności wyznacznika.
- e) wielomian charakterystyczny macierzy.
- f) wartości własne macierzy.
- g) twierdzenie Cayleya-Hamiltona.
- h) wkłady równań liniowych.
- i) twierdzenie Cramera.
- j) rząd macierzy.
- k) twierdzenie Croneckera-Capellego.

3) Geometria analityczna w R^3

- a) wektory w R^3 .
- b) działania na wektorach

- c) kąt między wektorami.
- d) iloczyn skalarny wektorów i jego własności
- e) iloczyn wektorowy wektorów i jego własności
- f) iloczyn mieszany wektorów.
- g) interpretacja geometryczna iloczynu mieszanego.
- h) płaszczyzna w przestrzeni R^3 .
- i) odległość punktu od płaszczyzny, wzajemne położenie płaszczyzn.
- j) prosta w przestrzeni R^3 .
- k) wzajemne położenie prostych.
- l) prosta i płaszczyzna.
- m) krzywe stożkowe na płaszczyźnie.
- n) powierzchnie stopnia drugiego w przestrzeni R^3 .

4) Rachunek różniczkowy i całkowy w R^n

- a) odległość punktów w przestrzeni R^n .
- b) otoczenie i sąsiedztwo punktu w R^n .
- c) granica ciągu w przestrzeni R^n .
- d) granica funkcji i ciągłość funkcji w R^n .
- e) zbiory domknięte, otwarte, zwarte w przestrzeni R^n .
- f) osiąganie kresów na zbiorach zwartych w R^n przez funkcję ciągłą.
- g) pochodne cząstkowe funkcji w R^n .
- h) pochodna kierunkowa.
- i) twierdzenie Schwarz'a.
- j) różniczka zupełna.
- k) pochodne cząstkowe i różniczki wyższych rzędów.
- l) ekstrema lokalne funkcji w przestrzeni R^n .
- m) warunek konieczny i wystarczający istnienia ekstremum lokalnego.
- n) funkcja uwikłana.
- o) pochodne funkcji uwikłanej.
- p) ekstrema funkcji uwikłanej.
- q) styczna i normalna do krzywej płaskiej.
- r) płaszczyzna styczna do powierzchni.
- s) całka podwójna Riemanna w prostokącie, całki iterowane.
- t) całka podwójna w obszarze normalnym.
- u) całka podwójna w obszarze regularnym.
- v) własności całki podwójnej, zamiana zmiennych w całce podwójnej, zastosowanie geometryczne i mechaniczne całki podwójnej.
- w) całka potrójna Riemanna w prostopadłościanie, całki iterowane.
- x) całka potrójna w obszarze normalnym w R^3 , całka potrójna w obszarze regularnym, zamiana zmiennych w całce potrójnej.
- y) zastosowanie geometryczne i mechaniczne całki potrójnej.

Z-5:

1) Całka oznaczona :

- a) definicja, interpretacja geometryczna i fizyczna całki Reimanna. Twierdzenia: o istnieniu całki oznaczonej, Newtona- Leibniza, o całkowaniu przez podstawienie,
- b) zastosowanie całek oznaczonych. Obliczanie pól figur płaskich ograniczonych wykresami funkcji $y=f(x)$ i $y=g(x)$, łukiem o równaniu biegunowym, krzywą określoną równaniami parametrycznymi. Obliczanie długości łuku krzywej określonej równaniem $y=f(x)$, równaniem biegunowym, równaniem parametrycznym. Obliczanie objętości i pól powierzchni figur obrotowych,
- c) całki niewłaściwe.

2) Informacje o szeregach funkcyjnych. Szeregi Fouriera.

3) Równania różniczkowe zwyczajne :

- a) równania o rozdzielonych zmiennych,
- b) równania , które przez podstawienie można sprowadzić do równań o rozdzielonych zmiennych ($y=f(ax+by+c)$),
- c) równania jednorodne (względem x i y),
- d) równania liniowe jednorodne i niejednorodne (metoda uzmienniania stałej i metoda przewidywań),
- e) równanie Bernoulliego,
- f) równania zupełne, czynnik całkujący,
- g) równania różniczkowe drugiego rzędu i wyższych rzędów,
- h) równania różniczkowe linowe wyższych rzędów,
- i) równania różniczkowe linowe n -tego rzędu o stałych współczynnikach, (jednorodne i niejednorodne) .

4) Funkcje wielu zmiennych :

- a) granica i ciągłość funkcji dwu zmiennych. Granice iterowane funkcji dwu zmiennych,
- b) rachunek różniczkowy funkcji dwu zmiennych. Pochodne cząstkowe. Różniczka zupełna. Pochodna kierunkowa. Gradient. Ekstrema funkcji dwu zmiennych,
- c) funkcja uwikłana. Definicja. Twierdzenie o funkcji uwikłanej. Ekstrema funkcji uwikłanej,
- d) ekstrema warunkowe

5) Rachunek całkowy funkcji wielu zmiennych :

- a) definicja całki podwójnej w prostokącie i całki potrójnej w prostopadłościanie,
- b) całki iterowane. Zamiana całki podwójnej (całki potrójnej) na całkę iterowaną,
- c) definicja całki podwójnej w dowolnym obszarze płaskim (analogicznie dla całki potrójnej),
- d) całka podwójna i potrójna w obszarze normalnym,
- e) zamiana zmiennych w całce podwójnej – współrzędne biegunowe,
- f) zamiana zmiennych w całce potrójnej - współrzędne walcowe i sferyczne,
- g) zastosowanie całek podwójnych i potrójnych do obliczania pól powierzchni obszarów i objętości brył.

6) Całki krzywoliniowe :

- a) definicja całki krzywoliniowej nieorientowanej,
- b) definicja całki skierowanej w przestrzeni i na płaszczyźnie,
- c) zamiana całki krzywoliniowej skierowanej na całkę oznaczoną,
- d) Twierdzenie Greena.

7) Funkcje zespolone :

- a) pochodna f-cji zespolonej zmiennej zespolonej
- b) r-nia Cauchy'ego-Riemanna
- c) f-cje holomorficzne
- d) całka z f-cji zespolonej zmiennej rzeczywistej
- e) całka krzywoliniowa z f-cji zespolonej zmiennej zespolonej
- f) twierdzenie całkowe Cauchy'ego, wzór całkowy Cauchy'ego
- g) szeregi zespolone, punkty osobliwe i residua.

8) Równania różniczkowe cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu (podstawowe informacje tylko na wykładach)

Z-6:

1) Całki nieoznaczone:

- a) całkowanie przez podstawianie i przez części (powtórzenie),
- b) całkowanie funkcji wymiernych, niewymiernych i trygonometrycznych.

- 2) Całki oznaczone:**
- a) całki niewłaściwe,
 - b) zastosowania geometryczne całek oznaczonych.
- 3) Funkcje wielu zmiennych:**
- a) dziedzina, wykres, granica, ciągłość, pochodne cząstkowe, różniczka zupełna, ekstrema,
 - b) funkcje uwikłane.
- 4) Liczby zespolone:**
- a) określenie, postać geometryczna, algebraiczna, trygonometryczna, wykładnicza,
 - b) działania na liczbach zespolonych, potęgowanie i pierwiastkowanie,
 - c) zasadnicze twierdzenie algebry, rozwiązywanie równań.
- 5) Równania różniczkowe zwyczajne:**
- a) równania rzędu pierwszego o zmiennych rozdzielonych,
 - b) jednorodne, liniowe, Bernoulliego, rzędu drugiego sprowadzalne do rzędu pierwszego,
 - c) równania liniowe rzędu n o stałych współczynnikach jednorodne i niejednorodne, metoda uzmienniania stałych i metoda przewidywań.
- 6) Całki wielokrotne:**
- a) całka podwójna,
 - b) całka potrójna,
 - c) zastosowanie całek wielokrotnych w geometrii i mechanice.
- 7) Elementy teorii pola:**
- a) pole skalarne i jego gradient,
 - b) pole wektorowe, dywergencja, rotacja, potencjał.
- 8) Całka krzywoliniowa nieorientowana i jej zastosowania.**
- 9) Szeregi liczbowe:**
- a) suma szeregu, kryteria zbieżności szeregów,
 - b) zbieżność bezwzględna i warunkowa.
- 10) Szeregi potęgowe:**
- a) promień zbieżności,
 - b) różniczkowanie i całkowanie oraz wyznaczanie sumy.
- 11) Rachunek prawdopodobieństwa:**
- a) zmienna losowa skokowa i ciągła,
 - b) dystrybuanta, wartość oczekiwana, wariancja i odchylenie standardowe zmiennej losowej,
 - c) zmienna losowa standaryzowana,
 - d) wybrane rozkłady zmiennej losowej (dwupunktowy, Bernoulliego, Poissona oraz rozkład normalny Gaussa).

Z-7:

- 1) Elementy algebry liniowej**
- a) macierze, działania na macierzach, wyznacznik macierzy, rząd macierzy, macierz odwrotna, równania macierzowe,
 - b) układy równań liniowych,
 - c) wzory Cramera, tw. Kroneckera-Capelli'ego.
- 2) Rachunek wektorowy**
- a) kartezjański ortogonalny układ współrzędnych,
 - b) iloczyn skalarny, iloczyn wektorowy, iloczyn mieszany.
- 3) Elementy geometrii analitycznej**
- a) prosta i płaszczyzna, ich wzajemne położenie,

- b) powierzchnie stopnia drugiego, kwadryki.
- 4) Liczby zespolone**
 - a) postać algebraiczna i trygonometryczna liczby zespolonej, działania na liczbach zespolonych, rozwiązywanie równań,
 - b) zasadnicze twierdzenie algebry.
- 5) Funkcje wielu zmiennych**
 - a) dziedzina, wykres, ciągłość, pochodne cząstkowe i kierunkowe, gradient, różniczka,
 - b) wyznaczanie ekstremów funkcji dwóch zmiennych,
 - c) funkcja uwikłana i jej pochodna.
- 6) Równania różniczkowe**
 - a) równania różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego o zmiennych rozdzielonych,
 - b) równania jednorodne,
 - c) równania liniowe rzędu pierwszego, metoda uzmienniania stałych i metoda przewidywań, rozwiązanie ogólne,
 - d) zagadnienie Cauchy'ego.
- 7) Całki wielokrotne**
 - a) całka podwójna i potrójna,
 - b) współrzędne walcowe i sferyczne, zastosowania geometryczne.

Z-8:

- 1) Algebra liniowa**
 - a) Algebra macierzy. Macierz i działania na macierzach
 - b) Wyznaczniki.
 - c) Układy równań liniowych
- 2) Podstawy geometrii analitycznej.**
 - a) Wektory na płaszczyźnie i w przestrzeni
 - b) Iloczyn skalarny wektorów
 - c) Iloczyn wektorowy i mieszany wektorów.
 - d) Prosta na płaszczyźnie i w przestrzeni
 - e) Płaszczyzna w przestrzeni.
 - f) Krzywe stopnia drugiego na.
 - g) Powierzchnie stopnia drugiego w przestrzeni.
- 3) Rachunek całkowy jednej zmiennej.**
 - a) Całka nieoznaczona prostych funkcji
 - b) Całkowanie przez części i podstawienie.
 - c) Całkowanie funkcji wymiernych.
 - d) Całkowanie wybranych funkcji niewymiernych.
 - e) Całkowanie funkcji trygonometrycznych.
 - f) Całka oznaczona na przedziale.
 - g) Zastosowania geometryczne i fizyczne całki oznaczonej.
 - h) Całka niewłaściwa.
- 4) Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych.**
 - a) Granica funkcji wielu zmiennych
 - b) Funkcje ciągłe wielu zmiennych.
 - c) Pochodne cząstkowe i pochodne w kierunku.
 - d) Zastosowania różniczki zupełnej.

- e) Ekstrema funkcji wielu zmiennych.
- f) Pochodne wyższych rzędów.
- g) Wzór Taylora.

5) Całki wielokrotne.

- a) Całka podwójna.
- b) Zamiana zmiennych w całce podwójnej - współrzędne biegunowe.
- c) Całka potrójna – współrzędne sferyczne.
- d) Zastosowania całek wielokrotnych.

6) Równania różniczkowe zwyczajne.

- a) Równania o rozdzielonych zmiennych.
- b) Równania liniowe I rzędu.
- c) Równanie Bernoulliego.
- d) Równania liniowe rzędu II o stałych współczynnikach.

7) Szeregi liczbowe.

- a) Kryteria zbieżności szeregów liczbowych o wyrazach nieujemnych.
- b) Zbieżność szeregów o wyrazach dowolnych.

8) Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej.

- a) Prawdopodobieństwo i jego własności.
- b) Prawdopodobieństwo warunkowe.
- c) Zmienna losowa jej rozkłady i jej parametry.
- d) Dystrybuanta zmiennej losowej.
- e) Populacja generalna i próba.
- f) Szeregi statystyczne.
- g) Parametry z próby.
- h) Współzależność cech statystycznych.